На правах рукописи

ОСЕНИН Виталий Николаевич

РЕШЕНИЕ НОВЫХ ЗАДАЧ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (в технической отрасли)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Саратов – 2009

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Коваль Владимир Александрович

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Першин Иван Митрофанович

доктор технических наук, профессор
Сафронов Валерий Васильевич

Ведущая организация – Самарский государственный технический университет, г. Самара

Защита состоится «15» декабря 2009 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д212.242.04 при ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет» по адресу: 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77, ауд. 319.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет».

Автореферат разослан «___» ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета В.В. Алешкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Системы с распределенными параметрами характеризуются пространственной протяженностью, а регулируемые переменные являются функциями не только времени, но и пространственных координат. Динамика распределенных объектов описывается дифференциальными уравнениями с частными производными, интегральными и интегродифференциальными уравнениями, а также «гибридными» системами уравнений различной природы, включая в качестве дополнительных соотношений и обыкновенные дифференциальные уравнения. Кроме того, коэффициенты в уравнениях часто зависят от пространственных координат и времени.

Задачи анализа и синтеза распределенных систем управления оказываются принципиально более сложными по сравнению с сосредоточенными системами за счет специфики распределенных объектов. Существует много методов решения уравнений с частными производными, интегральных уравнений. Однако, они малоэффективны при решении систем уравнений, задач с переменными коэффициентами, задач повышенной пространственной размерности (более единицы) и пр. Отсутствие формализованного методологического подхода для решения задач, связанных с распределенными системами, ставит перед их разработчиком проблемы, требующие нестандартных методов исследования и инженерных решений в каждом конкретном случае.

Большой вклад в развитие теории и практики систем с распределенными параметрами обеспечили фундаментальные результаты, полученные в работах А.Г. Бутковского, Г.Л. Дегтярёва, А.И. Егорова, Ю.В. Егорова, Е.А. Клевцова, В.Е. Краскевича, Ж.-Л. Лионса, К.А. Лурье, И.М. Першина, В.И. Плотникова, Л.М. Пустыльникова, Э.Я. Рапопорта, Т.К. Сиразетдинова, А.В. Фурсикова, Ф.Л. Черноусько и других отечественных и зарубежных ученых.

Успешных результатов в решении указанных проблем позволяет добиться спектральная теория, разработанная В.В. Солодовниковым, В.В. Семеновым Н.Д. Егуповым, А.Н. Дмитриевым для нестационарных сосредоточенных систем, которая получила дальнейшее развитие в работах В.А. Коваля и была использована для анализа и синтеза распределенных систем управления. При этом вводится понятие спектральной характеристики по пространственной переменной и дифференциальное уравнение с частными производными, на основании свойств спектральных характеристик, представляется бесконечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши, в правую часть которых входят члены, учитывающие граничные условия, внешние возмущения и внутренние источники. Преимуществом спектрального метода является возможность представления распределенных систем в форме Коши и применение методов пространства состояний для их анализа и синтеза.

В связи с вышесказанным, развитие спектрального метода, выявление новых свойств спектральных характеристик и разработка новых подходов к решению задач анализа и синтеза распределенных систем является актуальной и практически значимой задачей.

Цель диссертационной работы заключается в расширении класса математических моделей распределенных объектов, для анализа которых применим спектральный метод, использовании методов пространства состояний для синтеза распределенных систем управления.

Достижение цели осуществляется решением следующих **задач**:

1. Доказать новые свойства спектральных характеристик, которые дадут возможность выполнять анализ распределенных объектов, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными и с коэффициентами, зависящими от пространственной переменной.
2. Разработать методику анализа распределенных объектов управления, представленных интегральными уравнениями Фредгольма первого и второго рода и интегродифференциальными уравнениями на основе спектрального метода.
3. Разработать алгоритм выбора ортонормированной системы функций, по которой осуществляется разложение в ряд Фурье при спектральном представлении распределенного объекта.
4. Применить разработанные методики и алгоритмы к анализу и синтезу дискретной системы управления проточным нагревом жидких нефтепродуктов.

Методы исследования. Поставленные задачи решаются на основе методов математического анализа, теории матриц и матричных норм, теории интегральных и дифференциальных уравнений, теории оптимального управления, методов пространства состояний.

Новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Доказаны новые свойства спектральных характеристик, дающие возможность получать спектральное представление для произведения функций, зависящих от пространственных переменных и определенных интегралов по пространству.
2. Предложены алгоритмы анализа распределенных объектов, представленных интегральными уравнениями Фредгольма первого и второго рода и интегродифференциальными уравнениями на основе спектрального метода.
3. Исследована зависимость точности получаемых решений от выбора размерности спектральной характеристики. Разработаны критерии выбора ортонормированной тригонометрической системы функций при решении задач анализа и синтеза распределенных систем на основе спектрального метода.
4. Исследована методика восстановления переменных состояния распределенных объектов, представленных в спектральной форме,

посредством решения системы линейных алгебраических уравнений с использованием алгоритма регуляризации по Тихонову.

5. Решена задача синтеза дискретной распределенной системы управления тепловым режимом проточного нагревателя нефтепродукта с учетом изменения скорости движения нефтепродукта по длине нагревателя.

Практическая ценность полученных в диссертационной работе результатов заключается в их конструктивном характере, направленности на решение практических задач. Разработанные процедуры позволили расширить возможности спектрального метода для решения задачи анализа и синтеза распределенных систем и задач восстановления состояния объектов с распределенными параметрами. Предлагаемые методики реализованы в виде программных продуктов. Решена задача синтеза дискретной распределенной системы управления тепловым режимом проточного нагревателя нефтепродуктов.

Реализация и внедрение результатов работы. Работа выполнялась в соответствии с планом госбюджетных научно-исследовательских работ, проводимых на кафедре «Техническая кибернетика и информатика» СГТУ в рамках основного научного направления «Аналитическая теория автоматического управления». Полученные результаты использовались в ЗАО «Управление промышленной автоматики», принадлежащем ОАО «Саратовнефтегаз» и входящем в структуру ОАО НК «Русснефть», при разработке системы управления путевым подогревателем нефти, что подтверждается соответствующей справкой. Результаты работы также использовались в учебном процессе при чтении лекций по курсу «Распределенные системы автоматического управления» студентам специальности «Управление и информатика в технических системах» и направления «Автоматизация и управление».

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены и обсуждены на XVII Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-17» (Кострома, 2004), 2-й Всероссийской научной конференции «Управление и информационные технологии» (Пятигорск, 2004), 2-й Международной научной конференции «Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения» (Саратов, 2005), XIX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-19» (Воронеж, 2006), Международной научной конференции «Системный синтез и прикладная синергетика» (Пятигорск, 2006), XX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-20» (Ярославль, 2007), Международной конференции «Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении» (Саратов, 2007), XXI Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-21» (Саратов, 2008), Международной научной конференции

«Проблемы управления, передачи и обработки информации (АТМ-ТКИ-50)» (Саратов, 2009).

Публикации. По результатам исследований автором лично и в соавторстве опубликовано 18 научных работ, из них 2 работы в журналах из перечня, рекомендованного ВАК. Получено 2 свидетельства об официальной регистрации программ для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Опубликованные материалы полностью отражают содержание диссертации. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, пяти глав, сопровождающихся выводами, заключения, приложений и списка использованной литературы, включающего 100 наименований. Общий объем работы составляет 165 страниц, включая 66 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, формулируются цель и задачи исследования, кратко изложена работа по главам, дана характеристика научной новизны и практической значимости, приведены основные научные результаты, выносимые на защиту.

В первой главе выполнен обзор существующих методов анализа систем с распределенными параметрами. Дано краткое изложение ранее полученных результатов по использованию спектрального метода для анализа распределенных систем управления.

На примере пространственно-одномерного распределенного объекта управления, описываемого дифференциальным уравнением с частными производными параболического типа при соответствующих начальных и граничных условиях, осуществлен переход к спектральной форме записи. При этом полагается, что регулируемая переменная объекта управления $\varphi(x,t)$ является однозначной, непрерывной, ограниченной функцией с интегрируемым квадратом на интервале $x \in [a,b]$, и вводится понятие пространственной спектральной характеристики

$$\Phi_0(h,t) = \int_a^b P(h,x)\varphi(x,t)dx\,,\ x \in [a,b],\ h = \overline{(1,\infty)}\,, \tag{1}$$

где $P(h,x)$ – заданная ортонормированная система функций на интервале $x \in [a,b]$; t – время.

Спектральная характеристика Φ_0 представляет собой бесконечномерный вектор коэффициентов ряда Фурье функции $\varphi(x,t)$, вычисленных для ортонормированной системы $P(h,x)$. Используя введенное определение спектральной характеристики и ранее полученные свойства спектральных характеристик (линейности, представления произведения функций, производных первого и высших порядков и др.), выполнен переход от уравнения с частными производными к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\dot{\Phi}_0 = A\Phi_0 + BU + \Phi_v, \quad (2)$$

где Φ_v – бесконечномерный вектор пространственных спектральных характеристик внешних возмущений; A – бесконечномерная квадратная матрица коэффициентов; B – матрица коэффициентов, определяемая по граничным условиям задачи, размером $(\infty \times 2)$ при условии, что управление осуществляется с двух границ; U – вектор управлений размером (2×1), являющийся функцией времени.

В результате решения (2) при соответствующих начальных условиях, представленных в спектральной форме по начальным условиям исходного уравнения, находится спектральная характеристика Φ_0. Решение задачи в пространственных переменных определяется как сумма ряда Фурье по выбранной ортонормированной системе функций $P(h, x)$

$$\varphi(x, t) = P^T \Phi_0, \quad (3)$$

где P – бесконечномерный вектор, составленный из функций ортонормированной системы разложения; «Т» - символ транспонирования.

Для выполнения вычислительных процедур необходимо провести усечение (ограничение) размерности бесконечномерных векторов и матриц в (2), (3). Ограничение выполняется на основе приведенных в работе достаточных условий, которым должна удовлетворять усеченная система (2), чтобы решение бесконечной системы на конечном временном интервале было близко к решению усеченной системы при достаточно большом порядке усечения. Это условия сходимости решений при ограниченном векторе спектральных характеристик.

Благодаря представлению модели распределенного объекта в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши (2) можно использовать хорошо формализованные методы пространства состояний для синтеза распределенной системы управления.

Вторая глава посвящена разработке и применению новых свойств спектральных характеристик. В первом параграфе доказываются новые свойства спектральных характеристик: свойство коммутативности представления произведения функций в спектральной форме и представление определенного интеграла по пространству в спектральной форме. Свойство коммутативности представления произведения функций в спектральной форме заключается в равенстве спектральной характеристики от произведения функций $\varphi_1(x, t) \cdot \varphi_2(x, t)$ спектральной характеристике от произведения функций $\varphi_2(x, t) \cdot \varphi_1(x, t)$. Предполагается, что для функций $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$ могут быть найдены спектральные характеристики по заданной ортонормированной системе функций $P(h, x)$

$$\Phi_1(h,t)=\int_a^b \varphi_1(x,t)P(h,x)dx\,,\ \ (h=\overline{1,\infty}),\tag{4}$$

$$\Phi_2(h,t)=\int_a^b \varphi_2(x,t)P(h,x)dx\,,\ \ (h=\overline{1,\infty}).\tag{5}$$

Доказано, что выполняется равенство

$$\overline{\Phi}_{11}\Phi_2=\overline{\Phi}_{12}\Phi_1,\tag{6}$$

где произведение $\overline{\Phi}_{11}\Phi_2$ – спектральное представление произведения $\varphi_1(x,t)\cdot\varphi_2(x,t)$; $\overline{\Phi}_{12}\Phi_1$ – спектральное представление произведения $\varphi_2(x,t)\cdot\varphi_1(x,t)$; $\overline{\Phi}_{11}$ – бесконечномерная квадратная матрица первого сомножителя (если первым сомножителем является $\varphi_1(x,t)$); $\overline{\Phi}_{12}$ – бесконечномерная квадратная матрица первого сомножителя (если первым сомножителем является $\varphi_2(x,t)$); Φ_1, Φ_2 – бесконечномерные векторы спектральных характеристик от функций $\varphi_1(x,t)$, $\varphi_2(x,t)$ соответственно.

Второе доказанное свойство позволяет представлять в спектральной форме интегралы вида

$$J(x,t)=\int_a^b K(x,\xi)Q(\xi,t)d\xi\,,\tag{7}$$

где $K(x,\xi)$ – весовая функция, вещественная, однозначная, непрерывная и ограниченная на $\xi\in[a,b]$, $x\in[a,b]$; $Q(\xi,t)$ – вещественная, однозначная, непрерывная и ограниченная функция на $\xi\in[a,b]$.

Полагаем, что для функций $K(x,\xi)$ и $Q(\xi,t)$ могут быть найдены спектральные характеристики по ортонормированной системе $P(h,\xi)$. Доказано, что выражение (7) в спектральной форме представляется в виде

$$\Phi_J(\overline{h},x)=\sum_{h=1}^{\infty}\overline{P}_{-1}(\overline{h},h)\Phi_Q(h,t)\,,\ (\overline{h}=\overline{1,\infty}),\tag{8}$$

где $\Phi_J(\overline{h},x)$ – составляющая бесконечномерного вектора спектральной характеристики функции $J(x,t)$ по ортонормированной системе $P(h,\xi)$; $\overline{P}_{-1}(\overline{h},h)$ – элемент бесконечномерной квадратной операционной матрицы представления определенного интеграла по пространству в спектральной форме; $\Phi_Q(h,t)$ – составляющая бесконечномерного вектора спектральной характеристики функции $Q(\xi,t)$ по ортонормированной системе $P(h,\xi)$.

Элементы матрицы $\overline{P}_{-1}(\overline{h},h)$ определяются выражением

$$\overline{P}_{-1}(\overline{h},h)=\int_a^b P(\overline{h},x)\Phi_K(h,x)dx\,,\ (h=\overline{1,\infty}),\ (\overline{h}=\overline{1,\infty}),\tag{9}$$

где $\Phi_K(h,x)$ – составляющая бесконечномерного вектора спектральной характеристики от $K(x,\xi)$ по ортонормированной системе функций $P(h,\xi)$

$$\Phi_K(h,x)=\int_a^b K(x,\xi)P(h,\xi)d\xi,\ (h=\overline{1,\infty}). \qquad (10)$$

Выражение (8) может быть записано в матричной форме

$$\Phi_J=\overline{P}_{-1}\Phi_Q, \qquad (11)$$

где Φ_Q – бесконечномерный вектор спектральной характеристики по пространству для функции $Q(\xi,t)$; Φ_J – бесконечномерный вектор спектральной характеристики от определенного интеграла; $\overline{P}_{-1}$ – бесконечномерная квадратная операционная матрица представления определенного интеграла по пространству в спектральной форме.

Свойство коммутативности представления произведения функций в спектральной форме открывает возможность представления в спектральной форме любого произведения функций, в том числе произведений производных по пространственным переменным (задачи управления упругими конструкциями); позволяет представлять в спектральной форме дифференциальные уравнения с частными производными, у которых коэффициенты зависят от пространственных переменных. Свойство о представлении определенного интеграла по пространству в спектральной форме делает возможным применение спектрального метода при решении задач анализа распределенных объектов, описываемых интегральными уравнениями (процессы, протекающие в сплошных средах с высокой проводимостью, таких как плазма и жидкий металл) и интегродифференциальными уравнениями (нестационарные радиационные процессы в ядерном реакторе, процессы электрической или магнитной поляризации материалов).

Во втором параграфе главы разработана методика решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма первого и второго рода на основе спектрального метода. Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода представляется выражением

$$y(x,t)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi,t)d\xi=f(x,t),\quad x\in[a,b], \qquad (12)$$

где $y(x,t)$ – искомая функция; λ – заданный числовой параметр; $K(x,\xi)$ – ядро интегрального уравнения; $f(x)$ – свободный член; a, b – пределы интегрирования, конечные числа; x – пространственная переменная.

Полагаем, что функции $y(x,t)$, $K(x,\xi)$, $f(x,t)$ непрерывные, ограниченные и для них могут быть найдены спектральные характеристики по ортонормированной системе функций $P(h,x)$. На основе доказанного свойства о спектральной характеристике от определенного интеграла по пространству уравнение (12) представляется в спектральной форме

$$\Phi_y - \lambda \overline{P}_{-1} \Phi_y = \Phi_f \,, \qquad (13)$$

где Φ_y – бесконечномерный вектор спектральной характеристики функции $y(x,t)$; $\overline{P}_{-1}$ – бесконечномерная квадратная операционная матрица представления определенного интеграла; Φ_f – бесконечномерный вектор спектральной характеристики функции $f(x,t)$.

Выражение (13) является системой неоднородных алгебраических уравнений, решение которой определяется соотношением

$$\Phi_y = \left[E - \lambda \overline{P}_{-1}\right]^{-1} \Phi_f \,, \qquad (14)$$

где E – бесконечномерная единичная матрица.

Приближенное решение $\tilde{y}(x,t)$ исходного интегрального уравнения (12) получается как сумма ряда Фурье по принятой ортонормированной системе функций $P(h,x)$

$$\tilde{y}(x,t) = P^T \Phi_y \,, \qquad (15)$$

где P – бесконечномерный вектор, составленный из функций ортонормированной системы разложения; «Т» - символ транспонирования.

Разработанная методика также применима при отыскании решений неоднородных интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,\xi) y(\xi,t) d\xi = f(x,t) \,, \quad x \in [a,b]. \qquad (16)$$

На основе разработанной методики получено решение неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x,t) - 2\int_0^1 (x + \cos(\pi\xi)) y(\xi,t) d\xi = \frac{4}{\pi^2}(1 - e^{-0.001t}) \,. \qquad (17)$$

В качестве системы разложения выбрана ортонормированная на интервале $x \in [0,1]$ система функций

$$P(h,x) = \left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \ldots, \sqrt{2}\sin\left(\frac{(2h-1)\pi x}{2}\right), \ldots\right], \; (h = \overline{1,\infty}). \qquad (18)$$

Приближенное решение интегрального уравнения (17), полученное с использованием пяти членов ($h = 5$) системы разложения (18) определяется суммой ряда (15) по заданной ортонормированной системе

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x,t) = \Bigg[& 0.8118\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 0.0904\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + 0.0324\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \\ & - 0.0167\sin\left(\frac{7\pi x}{2}\right) + 0.0099\sin\left(\frac{9\pi x}{2}\right) - \ldots \Bigg](1 - e^{-0.001t})\end{aligned} \,. \qquad (19)$$

Решение интегрального уравнения (17), полученное спектральным методом, сравнивалось с точным решением уравнения (17), которое представляется выражением

$$y(x,t) = x(1 - e^{-0.001t})\,. \tag{20}$$

В результате установлено, что относительная среднеквадратическая ошибка определения решения в установившемся режиме составляет $\delta = 0.0128$ при числе членов разложения $h = 5$.

Выполненные исследования сходимости решения показали, что решение интегрального уравнения (17), полученное спектральным методом, равномерно сходится на интервале $x \in [0,1]$.

Четвертый параграф главы посвящен разработке методики решения задачи анализа распределенных объектов, описываемых интегродифференциальными уравнениями, например, нестационарных процессов в ядерном реакторе. Рассмотрено уравнение вида:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} &= \alpha_0(x)\varphi(x,t) + \alpha_1(x)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} + \alpha_2(x)\frac{\partial\varphi^2(x,t)}{\partial x^2} - \\ &- \int_a^b C(x,\xi,t)\varphi(\xi,t)d\xi + \beta(x)f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t > 0,\end{aligned} \tag{21}$$

где $\varphi(x,t)$ – переменная состояния; x – пространственная переменная $x \in [a,b]$; $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta(x)$ – коэффициенты уравнения; $C(x,\xi,t)$ – ядро интегрального преобразования; $f(x,t)$ – внешнее возмущение.
Функции $C(x,\xi,t)$ и $f(x,t)$ – непрерывные, ограниченные и однозначные.
Уравнение (21) рассматривается при следующих граничных условиях:

$$\varphi(a,t) = \varphi_a(t), \quad t \ge 0, \quad \varphi(b,t) = \varphi_b(t), \quad t \ge 0, \tag{22}$$

и начальных условиях:

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \; x \in [a,b]. \tag{23}$$

Функция $\varphi(x,t)$ полагается однозначной, непрерывной, ограниченной, с интегрируемым квадратом и представимой рядом Фурье на основе заданной ортонормированной системы функций $P(h,x)$.

На основе существующих и доказанных в настоящей главе новых свойств спектральных характеристик, уравнение (21) представляется в спектральной форме

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_\varphi}{dt} &= \Phi_{10}\cdot\Phi_\varphi + \Phi_{11}(P_1\Phi_\varphi + \Gamma_1^{0a} + \Gamma_1^{0b}) + \Phi_{12}(P_2\Phi_\varphi + \Gamma_2^{0a} + \\ &+ \Gamma_2^{0b}) - \overline{P}_{-1}\Phi_\varphi + \Phi_{1\beta}\cdot\Phi_f\,,\end{aligned} \tag{24}$$

где Φ_φ, Φ_f – бесконечномерные векторы спектральных характеристик функций $\varphi(x,t)$ и $f(x,t)$ соответственно; P_1, P_2 – бесконечномерные квадратные операционные матрицы представления в спектральной форме производных по пространству функции $\varphi(x,t)$ первого и второго порядков соответственно; Φ_{10}, Φ_{11}, $\Phi_{12}, \Phi_{1\beta}$ – бесконечномерные квадратные матрицы первого сомножителя; $\overline{P}_{-1}$ – бесконечномерная квадратная операционная матрица представления определенного интеграла по пространству в спектральной форме; Γ_1^{0a}, Γ_1^{0b}, Γ_2^{0a}, Γ_2^{0b} – бесконечномерные векторы граничных условий.

Выражение (24) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в которой неизвестными являются элементы вектора спектральной характеристики регулируемой переменной $\varphi(x,t)$ распределенной системы. Важной особенностью выполненных преобразований является вхождение граничных условий и внешних воздействий в правую часть системы. Система (24) решается при начальных условиях, которые получаются в результате спектрального представления по ортонормированной системе функций $P(h,x)$ начальных условий (23). Приближенное решение исходной задачи (21) в пространственных координатах определяется как сумма ряда по принятой ортонормированной системе функций.

В пятом параграфе, в качестве примера, на основе спектрального метода найдено решение интегродифференциального уравнения вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} &= 0.7\varphi(x,t) + 0.516\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} + 0.1\frac{\partial\varphi^2(x,t)}{\partial x^2} - \\ &- \int_0^1\left[6.3\cos(\pi x)e^{-2\xi} + 4\sin(\pi\xi)\right]\varphi(\xi,t)d\xi + 2e^{-0.287t}, \quad x\in(0,1), \quad t>0,\end{aligned} \tag{25}$$

с граничными условиями: $\varphi(0,t)=0$, $t\geq 0$, $\varphi(1,t)=0$, $t\geq 0$; (26)

и начальными условиями: $\varphi(x,0)=\sin(\pi x)$, $x\in[0,1]$. (27)

В качестве системы разложения выбрана ортонормированная на интервале $x\in[0,1]$ система функций

$$P(h,x) = \left[\sqrt{2}\sin(\pi x),\ \sqrt{2}\sin(2\pi x),\ \sqrt{2}\sin(3\pi x),\ \ldots,\ \sqrt{2}\sin(h\pi x)\right],\ (h=\overline{1,\infty}). \tag{28}$$

Решение уравнения (25), полученное спектральным методом при использовании только первых пяти уравнений бесконечномерной системы (28) сравнивалось с точным решением уравнения (25), которое определяется соотношением

$$\varphi(x,t) = \sin(\pi x)e^{-0.287t}. \tag{29}$$

Проведенные исследования показали, что относительная погрешность определения значения функции в любой точке пространства $x\in[0,1]$ не превышает 3,91% при числе членов разложения $h=5$.

В третьей главе исследованы проблемы выбора ортонормированных систем функций и количества членов разложения, участвующих в вычислительной процедуре, при использовании спектрального метода для анализа и синтеза систем с распределенными параметрами. Разработаны рекомендации относительно выбора системы разложения в зависимости от решаемой задачи.

1. Выбор системы разложения следует делать из условия наибольшего соответствия формы первой гармоники системы разложения форме предполагаемого решения.
2. Выбранная система разложения должна по возможности обеспечивать воспроизведение граничных условий решаемой задачи. Для этого необходимо, чтобы пространственные гармоники системы разложения на границах совпадали или были близки к граничным условиям.
3. За критерий оптимальности выбора системы разложения можно принять условие минимизации точностных характеристик при представлении функции состояния в виде ряда.
4. Желательно, чтобы матрицы, используемые для спектрального представления, не имели особенностей (линейно-зависимых строк или столбцов). Указанные особенности могут привести к неполной управляемости и наблюдаемости полученной системы.

Изучено влияние выбранной ортонормированной системы функций на качество решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, полученное спектральным методом. Как показали выполненные расчеты, относительная среднеквадратическая ошибка приближенного решения, полученного спектральным методом, с увеличением числа членов разложения изменяется по падающему экспоненциальному закону. Однако следует учитывать, что увеличение размерности решаемой задачи более 5÷7 практически не увеличивает точность решения, но приводит к усложнению вычислительных процедур.

Выявлены особенности вычисления операционных матриц дифференцирования высших порядков, которые используются для представления производных высших порядков от функции по пространственной переменной и определяются по формуле

$$P_m = P_1^m, \ (m = 2,\ 3,\ \dots), \tag{30}$$

где P_1 – операционная матрица дифференцирования первого порядка

$$P_1(\bar{h}, h) = \int_a^b P(\bar{h}, x)\left[\frac{\partial}{\partial x} P(h, x)\right] dx, \quad (h = \overline{1, \infty}), \quad (\bar{h} = \overline{1, \infty}). \tag{31}$$

Для различных ортонормированных тригонометрических систем разложения были вычислены матрицы P_1, P_2, P_3, P_4. Матрицы вычислялись размерностями (5х5), (20х20), (35х35) и (50х50), после чего усекались до размерности (5х5). Выяснилось, что элементы усеченной матрицы P_1 не зависят от ее первоначальной размерности, т.е. при увеличении размерности элементы матрицы, вычисленные для меньшей размерности, не изменяются, к существующей матрице лишь добавляются дополнительные строки и столбцы, а элементы усеченных операционных матриц дифференцирования высших порядков изменяются при изменении первоначальной размерности, что обусловлено возведением в степень матрицы P_1. Для усеченных матриц P_1, P_2, P_3, P_4 рассчитывались Евклидовы нормы

$$\|P_m\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(P_{m\,ij})^2}\ , \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{32}$$

где $P_{m\,ij}$ – элемент матрицы P_m с индексами i и j.

Выполненные исследования позволили сделать вывод о сходимости последовательностей, составленных из Евклидовых норм для операционных матриц дифференцирования второго и выше порядков, вычисленных для возрастающего числа членов ортонормированной системы с последующим усечением до определенной размерности. Это означает, что последовательности усеченных операционных матриц дифференцирования высших порядков также являются сходящимися, и этот факт обосновывает принципиальную возможность их вычисления для некоторого достаточно большого количества членов системы разложения с последующим усечением до требуемого размера.

На рис.1, 2, 3 изображены зависимости величины Евклидовой нормы для матриц P_2, P_3, P_4, усеченных до размерности (5х5) от первоначальной размерности матриц (n), вычисленных для ортонормированной на интервале $x \in [0,\,1]$ системы функций

$$P(h,x) = \left[\sqrt{2}\sin(\pi x),\ \sqrt{2}\sin(2\pi x),\ \sqrt{2}\sin(3\pi x),\ \ldots\right],\ (h = \overline{1,\infty}). \tag{33}$$

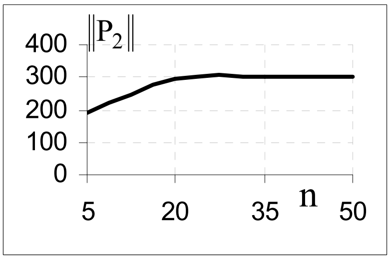

Рис.1. Евклидова норма матрицы P_2

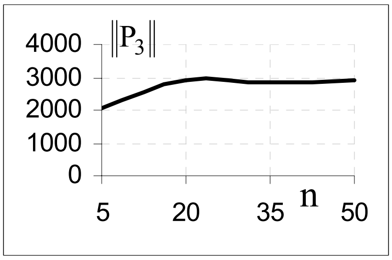

Рис.2. Евклидова норма матрицы P_3

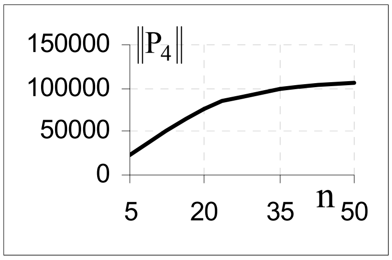

Рис.3. Евклидова норма матрицы P_4

На основе выявленных особенностей вычислены операционные матрицы дифференцирования 1-го, 2-го, 3-го, 4-го порядков для ряда ортонормированных тригонометрических систем функций.

В четвертой главе исследуются вопросы восстановления состояния распределенного объекта в спектральной форме представления по результатам измерений конечным количеством измерителей. Переменные состояния распределенной системы (коэффициенты ряда Фурье для измеряемой функции $\varphi(x,t)$) могут быть найдены на основании уравнений, составленных из условия равенства значений измеряемой переменной в определенных точках пространства их представлению с помощью ряда Фурье по ортонормированной системе функций в этих же точках. Приводится алгоритм, позволяющий определять коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\varphi(x,t)$ по заданной ортонормированной системе функций на основе выражения

$$v = (C^T C)^{-1} C^T \varphi, \tag{34}$$

где v – вектор восстановленных переменных состояния (вектор спектральной характеристики регулируемой функции распределенного объекта) размером $n \times 1$; C – матрица размером $m \times n$, составленная из элементов ортонормированной системы разложения, вычисленных для фиксированных значений пространственных координат на интервале $x \in [a,b]$ в которых производятся измерения; m – количество точек измерения; n – количество используемых членов разложения; φ – вектор значений измеряемой переменной, размерностью $m \times 1$.

Анализ уравнения (34) показал, что согласно следствию из теоремы Бине–Коши, оно имеет решение только в случае, если $m \geq n$. Таким образом, число точек пространства m, в которых проводятся измерения регулируемой переменной, должно быть больше или равно n – числу элементов ряда Фурье, определяющих приближенное представление функции.

Проведенные исследования позволили сделать вывод, что увеличение числа точек измерения m при одном и том же значении рассматриваемых членов ряда n приводит к весьма незначительному снижению погрешности восстановления функции состояния. Увеличение же числа n членов разложения в ряд при одном и том же количестве точек измерения m приводит к довольно существенному уменьшению погрешности.

Во втором параграфе главы показано, что рассмотренная ранее задача наблюдения в распределенной системе управления, синтезированной на основе спектрального представления объекта, является некорректной по Тихонову. То есть при сколь угодно малых изменениях исходных данных (измерениях функции состояния распределенного объекта) может произойти достаточно большое изменение результата решения.

Полученное в первом параграфе решение для определения вектора спектральной характеристики на основе измерения регулируемой переменной распределенного объекта регуляризовано, для чего были определены регуляризованные коэффициенты ряда Фурье из условия минимизации функционала, состоящего из суммы функционала невязки и сглаживающего функционала

$$\Phi^{\alpha} = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot P(i,x) - \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot P(i,x) \right]^2 dx + \alpha \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot P(i,x) \lambda_i \right]^2 dx, \tag{35}$$

где a_i – точные коэффициенты ряда Фурье; v_i – приближенные коэффициенты ряда Фурье; $P(i, x)$ – ортонормированные функции, по которым проводится разложение в ряд Фурье; α – параметр регуляризации; λ_i – последовательность положительных чисел, порядок роста которых при $n \to \infty$ не ниже, чем $i^{1+\varepsilon}$, где $\varepsilon \geq 0$; $x \in [a, b]$.

Найдены значения коэффициентов ряда Фурье, доставляющие минимум функционалу (35), которые определяются соотношением

$$\widetilde{a}_i = \frac{v_i}{1 + \alpha\lambda_i^2}, \ (i = \overline{1, n}). \quad (36)$$

По регуляризованным коэффициентам ряда получено приближенное представление функции состояния распределенного объекта

$$\widetilde{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i P(i, x)}{1 + \alpha\lambda_i^2}. \quad (37)$$

Значение параметра регуляризации α выбирается в соответствии с ожидаемой погрешностью исходных данных $\delta(\alpha)$.

Полученные результаты позволяют решать задачу наблюдения в распределенных системах, представленных спектральным или модальным методами.

В пятой главе решается задача синтеза распределенной системы управления. Объектом управления является проточный нагреватель нефтепродукта. Математическая модель объекта управления представлена системой двух дифференциальных уравнений с частными производными и коэффициентами, зависящими от пространственной переменной. Модель представлена в безразмерном виде и на основе спектрального метода преобразована к описанию в форме пространства состояний.

Особенностями решаемой задачи синтеза распределенной системы управления являются: переменная скорость движения нефтепродукта по длине; неполная информация о векторе состояния распределенного объекта в форме Коши; требование выполнения измерений температуры нефтепродукта в единственной точке нагревательной установки; действие возмущений (температура окружающей среды); требование достижения температурой нефтепродукта заданного значения и последующего поддержания температурного режима с учетом изменения температуры нефтепродукта, поступающего на вход нагревателя; реализация регулятора в БЦВМ, что определяет задачу как дискретную.

Поскольку отсутствует полная информация о переменных состояния, закон управления включает в себя наблюдатель. В качестве регулятора использован линейный стационарный динамический регулятор пониженной (по сравнению с объектом) размерности, построенный на базе дуального наблюдателя Люенбергера – дуальный динамический компенсатор (ДДК). В пользу выбора ДДК говорят также результаты анализа замкнутой системы: он обеспечивает более высокую точность регулирования и лучшее качество переходных процессов по сравнению с наблюдателем, построенным на базе прямого наблюдателя Люенбергера.

Предложена методика представления управляющего воздействия в полученной системе в дискретном по пространству виде (управляющие импульсы мощности по длине нагревателя), что позволило реализовывать установку в виде секционных обмоток, формирующих пространственные импульсы прикладываемой мощности. Функциональная схема системы изображена на рис.4.

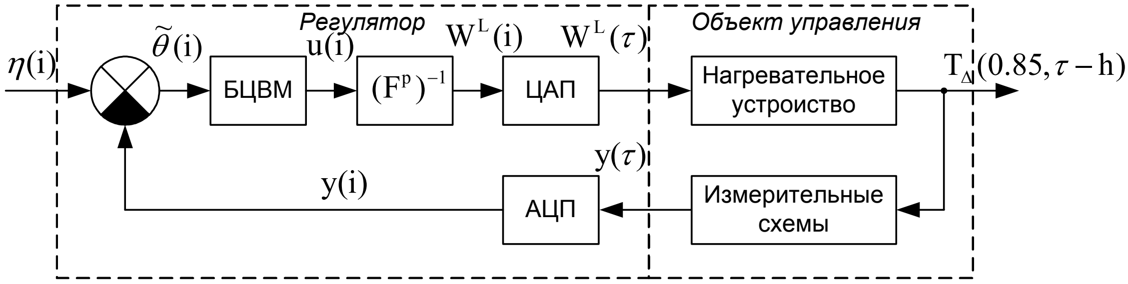

Рис.4. Функциональная схема системы управления проточным нагревателем нефтепродукта: $\eta(i)$ – задающее воздействие; $\tilde{\theta}(i)$ – регулируемая переменная; $W^L(i)$ – управляющее воздействие в форме постоянных по длине секции амплитуд импульсов мощности; $T_\Delta(0.85;\tau - h)$ – температура нефтепродукта в точке пространства ξ=0,85 $\xi \in [0,1]$; $(F^p)^{-1}$ – блок преобразования управляющего воздействия в форме вектора спектральной характеристики функции управления к вектору такой же размерности, состоящему из амплитуд управляющих пространственных импульсов.

Анализ работы системы, замкнутой полученным дискретным регулятором, проводился с использованием исходной модели распределенного объекта, представленной системой дифференциальных уравнений с частными производными, которая решалась конечно-разностным методом. При анализе учтено действие дополнительного возмущения – изменение температуры нефтепродукта на входе в нагреватель на 10% в сторону уменьшения, т.е. изменение граничных условий. Статическая ошибка системы относительно заданного значения на выходе нагревателя не превышает 1% при отклонении температуры нефтепродукта, поступающего на вход нагревателя, на 10%.

Результаты анализа показали выполнение заданных технических требований к качеству переходных процессов.

В заключении сформулированы основные научные результаты работы и приведены документы, подтверждающие их практическое использование.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Доказано свойство о коммутативности представления произведения функций в спектральной форме, что дает возможность применения

спектрального метода для анализа распределенных объектов управления, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными, коэффициенты которых являются функциями пространственной переменной.

2. Доказано свойство о представлении определенного интеграла по пространству в спектральной форме и на его основе разработана методика анализа распределенных объектов управления, представленных интегральными уравнениями Фредгольма первого и второго рода и интегродифференциальными уравнениями.

3. Выявлено влияние исходной размерности операционной матрицы дифференцирования первого порядка на значения элементов операционных матриц дифференцирования высших порядков. Показана сходимость норм операционных матриц дифференцирования ограниченной размерности высших порядков, вычисленных для различных размерностей матриц дифференцирования первого порядка.

4. Разработан ряд рекомендаций по выбору ортонормированных тригонометрических систем функций, по которым осуществляется разложение в ряд Фурье при спектральном представлении распределенного объекта. Исследована зависимость точности решений, получаемых спектральным методом, от выбора ортонормированной тригонометрической системы функций и размерности вектора спектральной характеристики.

5. Исследован способ оценки переменных состояния в распределенной системе управления на основе решения системы линейных алгебраических уравнений с применением алгоритмов регуляризации по Тихонову.

6. Решена задача управления проточным нагревателем нефтепродукта как распределенным объектом. Его математическая модель представлена системой дифференциальных уравнений с частными производными, учитывающей изменение скорости движения нефтепродукта по длине нагревателя. На основе спектрального представления распределенного объекта построен дискретный регулятор, обеспечивающий устойчивый выход нагревателя на режим по заданному закону и стабилизацию температуры на выходе относительно заданного значения при изменении температуры нефтепродукта на входе. Моделирование работы замкнутой системы показало, что требования к точности управления выполняются.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях, рекомендованных перечнем ВАК РФ

1. Осенин В.Н. Коммутативность представления произведения двух функций в спектральной форме / В.Н. Осенин // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2006. №4 (18). С. 34-37.

2. Осенин В.Н. Синтез распределенной следящей системы на основе метода АКОР / В.Н. Осенин // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. №1 (37). С. 88-94.

В других изданиях

3. Осенин В.Н. Решение задачи наблюдения в дискретной распределенной системе / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-17: сб. трудов XVII Междунар. науч. конф.: в 10 т. / под общ. ред. В.С. Балакирева. Кострома: Изд-во Костром. гос. технол. ун-та, 2004. Т.8. Секции 9, 10. С.10 – 13.
4. Осенин В.Н. Обработка управляющего сигнала в распределенной системе / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Проблемы естественно-научных дисциплин: сб. учеб.-метод. трудов / под ред. Л.В. Колпаковой. Саратов - Энгельс: Орион, 2004. С.24 – 28.
5. Осенин В.Н. Анализ распределенного объекта на основе спектрального метода / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Управление и информационные технологии: сб. докл. 2-й Всерос. науч. конф.: в 2 т. / Пятигорск: Спецпечать, 2004. Т. 1. С.272 – 276.
6. Осенин В.Н. Построение регуляризующего оператора с помощью минимизации квадратичного и сглаживающего функционала / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Управление и информационные технологии: межвуз. науч. сб. Пятигорск: ПГТУ, 2005. С.13 – 17.
7. Осенин В.Н. Задача наблюдения с использованием метода регуляризации / В.Н. Осенин // Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения: труды 2-й Междунар. науч. конф. / под ред. В.А. Подчукаева. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2005. С. 75 - 77.
8. Осенин В.Н. Математическая модель процесса нагрева нефти индукционным способом / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Системный синтез и прикладная синергетика: сб. докл. Междунар. науч. конф. Пятигорск: РИА-КМВ, 2006. С.255 – 260.
9. Осенин В.Н. Синтез системы управления нагрева нефти индукционным способом / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Системный синтез и прикладная синергетика: сб. докладов Междунар. науч. конф. Пятигорск: РИА-КМВ, 2006. С.249 – 255.
10. Осенин В.Н. Построение регуляризующего оператора с помощью минимизации функционала невязки / В.Н. Осенин // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-19: сб. трудов IX Междунар. науч. конф.: в 10 т. / под общ. ред. В.С. Балакирева. Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 2006. Т. 2. Секция 2. С.148 – 150.
11. Осенин В.Н. Анализ распределенного объекта управления, описываемого дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, спектральным методом / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Доклады Академии военных наук. Саратов, 2007. №1 (25). С. 49-54.

12. Осенин В.Н. Синтез распределенной системы управления на основе условия локальной оптимальности/ В.Н. Осенин // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-20: сб. трудов XX Междунар. науч. конф.: в 10 т. / под общ. ред. В.С. Балакирева. Ярославль: Изд-во Яросл. гос. техн. ун-та, 2007. Т.6. Секция 12. С.319 – 322.
13. Осенин В.Н. Математическая модель проточного нагревателя нефти в спектральной форме / В.Н. Осенин // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: материалы Междунар. конф. / под ред. А.Ф. Резчикова. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2007. С. 104-108.
14. Осенин В.Н. Анализ нагрева перекачиваемой нефти на основе спектрального метода / В.Н. Осенин // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-20: сб. трудов XX Междунар. науч. конф.: в 10 т. / под общ. ред. В.С. Балакирева. Ярославль: Изд-во Яросл. гос. техн. ун-та, 2007. Т. 6. Секция 12. С.102 – 104.
15. Осенин В.Н. Решение задачи синтеза распределенной системы управления / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Доклады Академии военных наук. Саратов, 2008. №5 (34). С. 63-73.
16. Осенин В.Н. Реализация дискретного распределенного управления в системе управления нагревом / В.Н. Осенин // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-21: сб. трудов XXI Междунар. науч. конф.: в 10 т. / под общ. ред. В.С. Балакирева. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2008. Т. 6. Секции 12, 13. С.243 – 244.
17. Осенин В.Н. Синтез системы управления нагревом нефти / В.Н. Осенин // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-21: сб. трудов XXI Междунар. науч. конф.: в 10 т. / под общ. ред. В.С. Балакирева. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2008. Т.2. Секции 2, 6. С.92 – 96.
18. Осенин В.Н. О сходимости операционных матриц при спектральном решении задач распределенного управления / В.Н. Осенин, В.А. Коваль // Проблемы управления, передачи и обработки управления (АТМ-ТКИ-50): сб. трудов Междунар. науч. конф. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2009. С. 21 - 24.

Подписано в печать 27.10.09 Формат 60×84 1/16
Бум. офсет. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. Заказ Бесплатно
Саратовский государственный технический университет
410054, Саратов, Политехническая ул., 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ. 410054, Саратов, Политехническая ул., 77